Colle du 06/11 - Sujet 1
Complexes et calcul algébrique

Question de cours. Démonstration de $|z+z'|^2 = \dots$ et de l'inégalité triangulaire supérieure.

Exercice 1. A l'aide d'un changement d'indice, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des complexes $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} iz_1 - 2z_2 = -4 + 3i \\ 2\overline{z_2} + \overline{z_1} = 3. \end{cases}$$

Colle du 06/11 - Sujet 2
Complexes et calcul algébrique

Question de cours. Démontrer la sommes des premiers carrés à l'aide de la somme des premiers entiers.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on pose $P_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$.

1. Montrer que $P_n = \frac{2}{n(n+1)} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$.
2. En déduire P_n.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z + |z| = 1 + 3i$.

Colle du 06/11 - Sujet 3
Complexes et calcul algébrique

Question de cours. Démonstration de $\cos(p) + \cos(q) = \dots$ en passant par les complexes.

Exercice 1. Calculer $\max_{|z|=1} \left(\left|z^3 + iz\right|\right)$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\prod_{p=1}^{n} \sum_{k=0}^{p} 2^{p!k}$.